



СЕЙСМИЧЕСКАЯ СТОЙКОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ КАБЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

A.G. Koryakin, *Cand. Sc. (Engineering), Head of Test Laboratory, OJSC VNIIPK;*

Yu.T. Larin, *Dr. Sc. (Engineering), Chief Research Scientist, OJSC VNIIPK;*

D.S. Kholodny, *Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of FTEMK Department, NRU MEI*

А.Г. Корякин, *канд. техн. наук, заведующий испытательной лабораторией ОАО «ВНИИКП»;*

Ю.Т. Ларин, *д-р техн. наук, главный научный сотрудник ОАО «ВНИИКП»;*

Д.С. Холодный, *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ФТЭМК НИУ «МЭИ»*

Аннотация. В данной статье представлены результаты расчётов совместных колебаний оптических кабелей, подвешенных на опорах. Опоры рассматриваются как балки с распределёнными параметрами, подверженные поперечным колебаниям под действием инерционных сил во время смещения грунта в точке крепления. После расчёта отклика всей системы на сейсмическое воздействие в виде ускорения, скорости или смещения на грунте, найдены амплитуды перемещений и ускорений в точках крепления оптических кабелей, подвешенных на опорах.

Ключевые слова: воздушные линии оптических кабелей связи, совместные колебания кабелей и опор, динамическое взаимодействие, расчёт частот колебаний.

Abstract. This article presents the calculation results of joint oscillations of optical cables suspended on poles. Poles are considered as support beams with distributed parameters, subjected to transverse vibrations under the action of inertia forces during the soil displacement at the attachment point. After the calculation of the system response to the seismic impact in the form of acceleration or soil displacement it was possible to find the amplitudes of displacement and acceleration at the attachment points of optical cables suspended on poles.

Key words: overhead lines of optical communication cables, joint oscillations of conductors and transmission poles, dynamic interaction, vibration frequency calculation.

Материал поступил в редакцию 6.10.2020

E-mail: koryakin-ag@vniikp.ru

Оптические кабели (ОК) – важные компоненты сетей связи, которые после природных или техногенных катастроф являются критически необходимыми объектами, обеспечивающими инфраструктурную устойчивость. Эта инфраструктура имеет большое значение для реагирования на чрезвычайные ситуации, сложившиеся в результате катастроф, а её работоспособность и непрерывная функциональность имеют высокий приоритет в случае сильных землетрясений и других чрезвычайных происшествий. Волоконно-оптические линии связи (ВОЛС) часто проектируются и прокладываются с помощью подвески на опорах с применением следующих марок оптических кабелей: ОПД, ОПМ, ОКСНМ, ОКТ, ОСД, ОКА, ОКМС, ОКЛЖ, ОКК,

ОКСНМ, ОКПД, ОПЦ и их аналогов. Конструирование подобных систем, связанных с учётом землетрясений в сейсмически активных регионах требуют надёжных расчётных методов.

Перемещение грунта при землетрясении вызывают колебания опор и подвешенного оптического кабеля на них, а возникающие при этом силы инерции являются причиной упругой или неупругой деформации всей конструкции. Эффект землетрясения оценивается по сейсмической шкале. В нашей стране с 1952 года утверждена 12-бальная система, разработанная на основе изучения эффектов разрушения. Наиболее ответственным для строительных целей является диапазон от 6 до 9 баллов. Сейсмическая

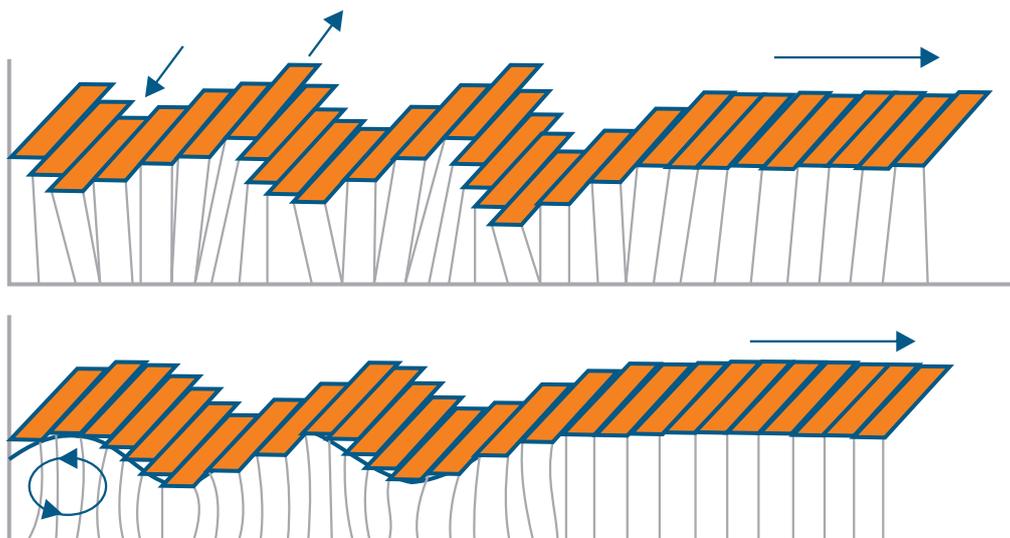


Рис. 1. Смещение грунта на земной поверхности при прохождении поверхностных волн.
Волна Лява – вверху, волна Рэлея – внизу

нагрузка в общем случае может иметь произвольное направление в пространстве (рис. 1). Устойчивость здания (сооружения) и его элементов зависит в конечном итоге от максимальных ускорения и колебания, которые это сооружение испытывает. Широкого практического использования для определения интенсивности землетрясения этот показатель пока не нашёл из-за большой трудности получения массового, пригодного для статистической обработки цифрового материала по ускорениям с места землетрясения. В диапазоне от 6 до 9 баллов существует большой разброс значений фактически замеряемых ускорений ($a = 0,5\text{--}10 \text{ м/с}^2$), что требует массовости измерений во время землетрясения, что недоступно даже для населённых и богатых научными центрами местностей [1].

Характер воздействия колебаний на конструкции и сооружения в значительной степени определяется соотношением периода собственных колебаний сооружений с периодами колебаний грунта. Чем ближе совпадают эти периоды, тем сильнее резонансные колебания сооружений и тем большую опасность представляют эти колебания для них.

В настоящее время в российских нормах по сейсмостойкому строительству до сих пор используется линейно-спектральный метод. Расчётная сейсмическая нагрузка представляет собой статически действующие силы, вызывающие в конструкции усилия, близкие к возникающим в них под действием максимальных инерционных сил во время землетрясения. Расчёт ведётся, как правило, с учётом горизонтального действия этих сил. Такие виды нагрузок, как действие воздушной ударной волны, сейсмические, ветровые и климатические температурные воздействия также могут быть рассмотрены в нелинейной постановке, в том числе для аналитически разрешимых

моделей механики твёрдого тела или смежных областях [2].

Признаётся, что подробные вычислительные процедуры не всегда необходимы, в частности, когда целью анализа является обеспечение глобальной сейсмостойкости. Проверка конструкций на сейсмическую устойчивость требует применения рациональных упрощённых методов, призванных дать оценку влияния взаимного колебания опор и подвешенных на них оптических кабелей связи.

Применение длинномерных и гибких кабелей с несущими или стабилизирующими функциями имеет давнюю традицию во многих инженерных приложениях. Начиная с первых исследований, относящихся к семидесятым или ранним восьмидесятым годам прошлого века [3, 4], чрезвычайная гибкость и низкое демпфирование конструкционных кабелей вызывали интерес исследователей, в основном сосредоточенных на прогнозировании и смягчении различных нелинейных явлений.

В последнее время особое внимание было уделено разработке усовершенствованных моделей кабельных линий, позволяющих производить расчёты совместных колебаний проводов и опор воздушных линий [5, 6].

При землетрясениях распределение частот движения грунта в 90 % случаев составляют 0,1–5,0 Гц, а в некоторых случаях – до 20 Гц. Как отмечалось, сейсмическое ускорение совершившегося землетрясения является важнейшей прогностической характеристикой для расчёта сейсмостойкости зданий и сооружений. При выполнении расчётов прежде всего требуется знать, какое сейсмическое ускорение получит масса сооружения при землетрясении. Расчётный балл, ожидаемый на местности по результатам сейсмоло-

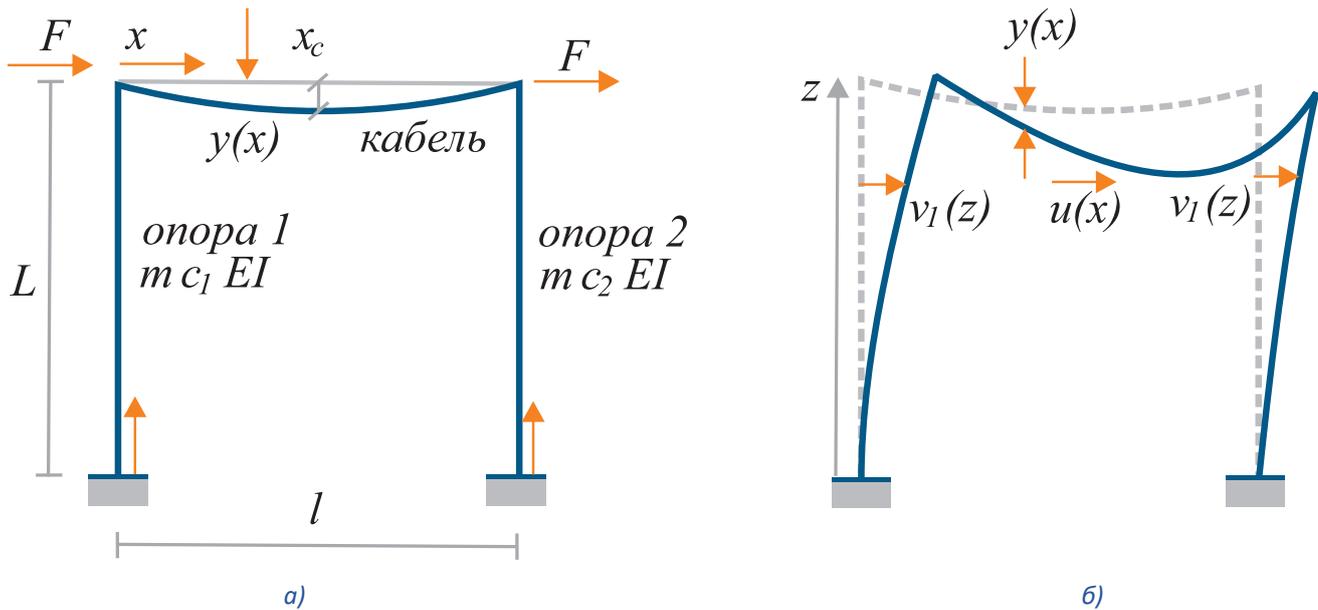


Рис. 2. Структурная система опоры–кабель: а – исходная; б – одна из разнообразных конфигураций

гических и инженерно-геологических исследований, должен быть переведён в расчётное ускорение.

Основные допущения. В настоящей работе рассмотрена динамика структурной системы, состоящей из двух вертикальных консольных опор (балок), соединённых подвесным провисшим кабелем (рис. 2).

Сложное структурное поведение опор в основном возникает из-за значительного геометрического нелинейного отклика этих опор на сейсмическое воздействие и взаимодействия между кабелем и опорами (рис. 3). Случайный характер большинства динамических нагрузок (ветровые и сейсмические) требует реалистичных трёхмерных моделей, в общем случае

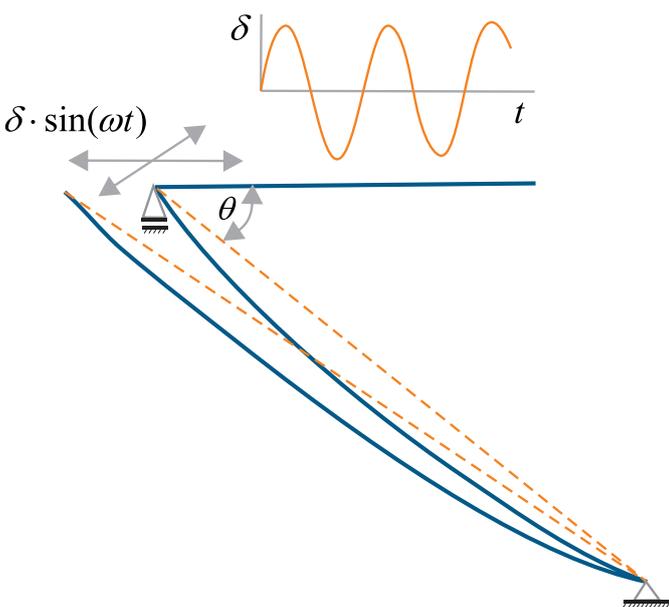


Рис. 3. Гармоническое горизонтальное смещение в плоскости, заданное на конце гибкого кабеля

учитывающих N опор. В частности, в сейсмическом анализе следует учитывать влияние пространственной вариации возбуждения на несколько опорных точек земли, прохождение поверхностных волн и влияние вертикальной составляющей движения грунта для обеспечения реалистичных и консервативных результатов моделирования. По всей видимости, доминирующий вклад динамической жёсткости кабеля по сравнению с другими источниками нелинейности, такими как малая гибкость и провисание кабеля, имеет второстепенное значение. Однако абсолютное отклонение в верхней части каждой опоры вызывает в самом кабеле нагрузки, способные его разрушить. Основное упрощение в настоящей работе состоит в рассмотрении одномерной модели колебаний подвешенного кабеля при действии на него поперечных и продольных гармонических нагрузок, что не приводит к потере общности при решении поставленной задачи.

Поведение кабеля. При расстоянии l_0 между опорами более 10 м жёсткостью кабеля пренебрегаем. Задачи о колебаниях сплошных сред (струна, стержень), мембрана, газ и др. приводят к уравнениям гиперболического типа. Обычно рассматриваются постановка и решение краевых задач для уравнений гиперболического типа в случае, когда изучаемые физические процессы могут быть охарактеризованы функциями двух независимых переменных: одной пространственной координаты и времени. В таких задачах малые колебания в среде без сопротивления описываются уравнениями с постоянными коэффициентами [7, 8].

Поперечные колебания кабеля. Кабель натянут с силой T и находится в прямолинейном положении равновесия, его концы неподвижно закреплены. В момент $t=0$ точкам кабеля сообщаются начальные от-

клонения скорости и ускорения. При землетрясении кратковременное или периодическое смещение точек опоры оптического кабеля за счёт сил инерции, связанных с массой самого кабеля, как раз и приводит к реализации тех или иных граничных условий.

При вынужденном отклонении h в любой промежуточной точке x_0 поперечные смещения кабеля в обеих точках крепления равны нулю, а нормальные колебания имеют вид:

$$u_n(x, t) = U_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{l}\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Параметр U_n зависит от величин вынужденного отклонения h и места его приложения x_0 .

Для кабельного изделия, всегда неоднородного по сечению из-за наличия основных элементов конструкции (оболочка, изоляция и жила) можно использовать усреднённые значения параметров при длине кабеля, многократно превышающей его диаметр, или поперечный характерный размер, если кабель не цилиндрический. Если задана усреднённая объёмная плотность массы материала кабеля ρ (кг/м³) или усреднённая линейная плотность массы материала кабеля m (кг/м), то для поперечных колебаний:

$$a_0^2 = \frac{T}{p \cdot S} = \frac{T}{m} = \frac{[m^2]}{[c^2]} \quad (2)$$

Для поперечных колебаний кабеля:

$$\omega_n = \frac{a_0}{L_0} = \frac{\pi \cdot n}{L_0} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad \text{или} \quad (3)$$

$$\omega_n = \frac{\pi \cdot n}{L_0} \sqrt{\frac{T}{S \cdot p}} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

где $\omega_n = 2\pi f_n$ – круговая частота,
 f_n – частота колебаний (наименьшая частота колебаний для первой гармоники будет при $n = 1$).
 Частоты ω_n называются собственными частотами колебаний. Провисание под действием силы тяжести в точке x кабеля вычисляется по формуле [7]:

$$v(x) = \frac{9,81}{2 \cdot a^2} (l \cdot x - x^2).$$

В случае сейсмического воздействия на рассматриваемую модельную систему целесообразно рассматривать вынужденные колебания под действием распределённых сил в среде без сопротивления и в среде с сопротивлением. Нагрузим такую модель поперечной периодической силой с частотой ω . Если к

струне с жёстко закреплёнными концами с момента времени $t=0$ приложена непрерывно распределённая сила Φ (Н/м) с линейной плотностью:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0(x) \sin(\omega t),$$

то легко исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса и без него [8, 9].

Растягивающие нагрузки при сейсмических колебаниях. Такие нагрузки ОК можно отнести к динамическим. Концы кабельного изделия могут быть:

- а) закреплены жёстко;
- б) двигаться в продольном направлении по заданному закону;
- в) свободны;
- г) закреплены упруго, то есть каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению.

Для продольных колебаний частоты зависят от способа крепления кабельного изделия и характера воздействия на его концах, если при каких-либо условиях кабель можно рассматривать как таковой. Если один конец ОК закреплён жёстко ($x=0$), а другой свободен ($x = \ell_0$), при начальных условиях $u(x, 0) = k \cdot x$ и $u_t(x, 0) = 0$, то нормальные колебания имеют вид:

$$u_n(x, t) = U_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_0}\right) \times \cos\left(\frac{(2n+1)\pi at}{2\ell_0}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Параметр U_n , как и в (1), зависит от граничных условий.

Для продольных колебаний круговая частота для первой гармоники:

$$\omega_{||} = \frac{\pi a_1}{2\ell_0} = \frac{\pi}{2\ell_0} \sqrt{\frac{E \cdot S}{m}}. \quad (5)$$

Основная частота продольных колебаний при этом определяется как:

$$f_{||} = \frac{\pi a_1}{2\ell_0} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4\ell_0} \sqrt{\frac{E \cdot S}{m}}. \quad (6)$$

Продольные частоты гораздо выше поперечных. Поставленная задача равноценна задаче с условием действия постоянной продольной силы F , приложенной к концу $x = \ell_0$. В момент $t=0$ действие силы F мгновенно прекращается. Колебания ОК находятся при нулевой начальной скорости всех точек стержня.



Решение задачи имеет тот же вид, если положить:

$$k = \frac{F}{E \cdot S}$$

Коэффициент k фактически представляет собой относительное удлинение. В составе кабельного изделия прочность обеспечивается конструктивными элементами, а избыточное натяжение протяжки, или, другими словами, растяжение кабеля при сейсмических колебаниях, способно негативно повлиять на передачу сигналов по нему.

Возможные частоты поперечных колебаний ОК. ОК всегда находится в составе кабельного изделия, однако для вилочной оценки частот колебаний ОК полезно знать наибольшую частоту колебаний. Максимально возможную частоту можно определить для гипотетической конструкции, состоящей из одного волокна, покрытого оболочкой с общим диаметром 250 мкм, удельным расчётным весом 0,062 г/м. Так, для пролёта в 10 м и натяжении 25 Н эта частота составит 32 Гц. Таким образом, можно сделать вывод, что указанная частота будет максимально возможной и исследование воздействий сейсмических колебаний на ОК более высоких частотах можно даже не рассматривать. Разумеется, при большей длине пролёта эту частоту колебаний надо соответствующим образом изменить. Уменьшение растягивающего усилия ОК в 2 раза уменьшает частоту в $\sqrt{2}$ раз.

Возможные частоты поперечных колебаний ОК с упрочняющими элементами. В качестве примера рассмотрим кабели для внешней и внутренней прокладки марок А-DF(ZN)2Y4Y-2 и I-D(ZN)H. Упрочняющий элемент – арамидные волокна (нити). Допустимая растягивающая нагрузка и масса находятся в

пределах 1200–3000 Н, удельный вес 0,065–0,018 кг/м соответственно. Растягивающее усилие или нагрузка T , составляет 50 % от максимально допустимой. Следует отметить, что ключевым параметром здесь является удельный вес ОК, а марка приводится для конкретизации расчётов. Частоты колебаний представлены на рис. 4, 5.

Частота колебаний первой гармоники составляет 4,8 Гц. При растягивающей нагрузке $T = 200$ Н ($T_0/3$), длине $L_0 = 10$ м, максимальное относительное провисание под действием собственной силы тяжести составляет 0,4 % или 40 мм. Провис 0,6 % или 66 мм при 1/10 нагрузки T_0 .

Частота колебаний первой гармоники составляет 6,1 Гц, при растягивающей нагрузке $T = 450$ Н ($T_0/3$), длине $L_0 = 10$ м, максимальное относительное провисание под действием собственной силы тяжести составляет 0,25 % или 25 мм.

Поведение опор. Опоры могут рассматриваться как консольные балки с распределёнными параметрами, подверженные поперечным колебаниям под действием инерционных сил во время смещения грунта в точке крепления [10]. Во многих случаях важно обеспечить не только прочность опор, но и отсутствие значительных их прогибов под нагрузкой. Стандартные статические схемы приложения нагрузок к опорам позволяют оценить величины их максимальных отклонений. В рамках данной работы выполнена оценка максимальных отклонений, скорости и ускорения в верхней точке опоры в схеме совместных колебаний проводов и опор (рис. 2). Во время работы на элементы конструкции действуют внешние усилия, создающие напряжения и деформации. Изгиб стержня или опоры, рассматриваемой как балка, часто происходит

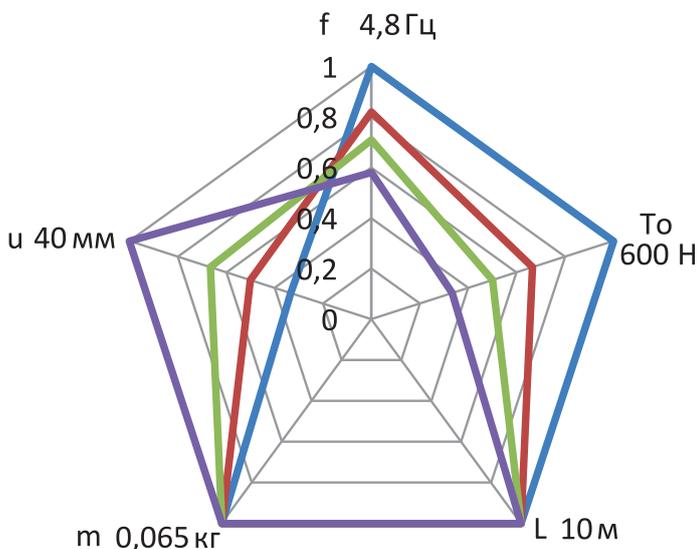


Рис. 4. Характер изменения частот колебаний (в относительных единицах) оптического кабеля I-D(ZN)H 4 (принятая нагрузка $T_0 = 600$ Н), удельным весом 0,065 кг/м, при изменении растягивающей нагрузки

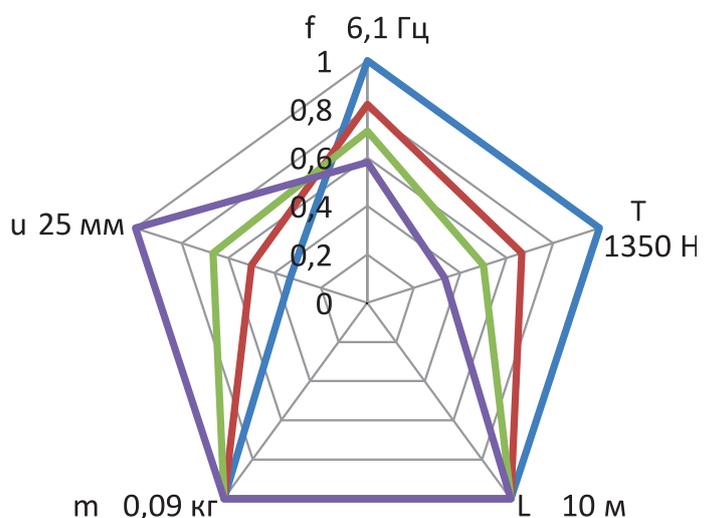


Рис. 5. Характер изменения частот колебаний (в относительных единицах) оптического кабеля А-DF(ZN)2Y4Y-2 $\varnothing 10$ мм (принятая нагрузка $T_0 = 1350$ Н), удельным весом 0,09 кг/м, при изменении растягивающей нагрузки

при действии изгибающих моментов, сосредоточенных или распределённых нагрузок, перпендикулярных оси стержня.

При прямом поперечном изгибе и постоянной изгибной жёсткости балки EJ уравнение упругой линии можно записать в виде дифференциального уравнения четвёртого порядка относительно прогиба $y(z)$ [10]:

$$EJ \frac{d^4 y}{dz^4} = q, \quad (7)$$

где E – модуль упругости;
 J – момент инерции сечения;
 q – интенсивность распределённой нагрузки на опору.

Прогиб $y(z)$, угол поворота $\psi(z)$ и внутренние силовые факторы – изгибающий момент $M(z)$ и поперечная сила $Q(z)$ – связаны соотношениями:

$$\varphi = \frac{dy}{dz}, \quad M = EJ \frac{d^2 y}{dz^2}, \quad Q = EJ \frac{d^3 y}{dz^3}.$$

Начало координат условимся совмещать с нижним сечением балки и направлять ось z вверх.

Рассмотрим два характерных случая изгиба: в первом – консольная балка изгибается сосредоточенной силой P ; во втором – распределённой силой q .

Для консольной балки с сосредоточенной силой P на свободном конце аналитическое выражение для прогиба имеет вид:

$$y(z) = \frac{P \cdot z^2}{2EJ_x} \cdot \left(L_0 - \frac{z}{3} \right),$$

где J_x – момент инерции сечения.

Консольная балка изгибается распределённой нагрузкой.

$$y(z) = \frac{q}{12EJ_x} \cdot \left(L_0^2 \frac{z^2}{2} - L_0 \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right). \quad (8)$$

Максимальный изгибающий момент M_{\max} , N -м действует в заделке, максимальные нормальные напряжения σ_{\max} в сечении опоры:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x}$$

Условие прочности выполняется с фактическим коэффициентом запаса

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}},$$

где $\sigma_T = 247$ МПа – предел текучести стали.

Предельную нагрузку на консольную балку часто рассчитывают так, что при относительном отклонении верхнего свободного конца в пределах y_{\max}/L от 1/400 до 1/100 при любом виде нагрузки целостность конструкции не нарушается. Отклонения при статических нагрузках при этом могут превышать указанные значения. Динамические нагрузки могут приводить к разрушениям конструкций при меньших значениях. Все зависит от характеристик материала опоры, её конструкции и характера нагрузки. За модельную стальную опору в настоящей работе была принята двутавровая широкополочная балка с номером профиля № 26Ш2 со следующими характеристиками: площадь поперечного сечения – $S = 6,273 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ (62,73 см²), момент инерции поперечного сечения – $J = J_x = 7,429 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ (7429 см⁴), момент сопротивления – $W = W_x = 5,83 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ (583 см³), модуль продольной упругости стали – $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, плотность – $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$, погонная или линейная плотность – $m_0 = 49 \text{ кг/м}$. При действии поперечной нагрузки абсолютное отклонение y_{\max} не приводящее к деформации, в абсолютном выражении для опоры в виде двутавровой широкополочной балки с номером профиля № 26Ш2 длиной $L_0 = 10$ м не должно превышать 10 см. Рамная конструкция, состоящая из нескольких изгибаемых элементов, соединённых между собой, естественно имеет меньшее поперечное отклонение.

Расчёт бетонных и железобетонных конструкций производят по напряжениям, усилиям, деформациям и перемещениям, вычисленным от внешних воздействий в конструкциях с учётом возможности образования трещин в местах заложения арматуры. Арматура в железобетонных опорах должна работать на растяжение и не приводить к отслоению. Физическая нелинейность и анизотропия учитываются по соотношениям, связывающим между собой напряжения и деформации (или усилия и перемещения), а также по условиям прочности и трещиностойкости материала. Предел прочности на сжатие, растяжение и изгиб для железобетонных конструкций существенно различаются. В цели настоящей работы не входит расчёт бетонных опор. Однако даже простая оценка их целостности при транспортировке и хранении в горизонтальном положении позволяет оценить допустимый предел их прочности при нагрузке от собственного веса.

За модельную бетонную опору в настоящей работе была принята железобетонная конструкция прямоугольного сечения шириной $b = 0,185$ м, высотой $h = 0,24$ м со следующими характеристиками: площадь поперечного сечения – $S = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ (444 см²), момент инерции поперечного сечения ($J = bh^3/12$) – $J = J_x = 2,131 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ (21310 см⁴), момент сопротивления ($W = bh^2/6$) – $W = W_x = 1,776 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$



(1776 см³), модуль продольной упругости бетона – $E=3,8 \cdot 10^{10}$ Па, плотность – $\rho=2450$ кг/м³, погонная или линейная плотность – $m_0=108,8$ кг/м. Для железобетонного столба с размерами 24×18 см² это отклонение составляет примерно 5 см, хотя многое в последнем случае зависит от степени армирования бетона.

Статический прогиб модельной стальной консольной опоры с коэффициентом запаса $n=1$ при поперечной нагрузке на верхнем конце $F=14400$ Н составляет $y_{max}=0,323$ м, с коэффициентом запаса $n=2$ при нагрузке $F=7200$ Н – $y_{max}=0,157$ м.

Статический прогиб модельной стальной консольной опоры с коэффициентом запаса $n=1$ при распределённой нагрузке по всей длине опоры $q=2800$ Н/м составляет 0,242 м, что соответствует поперечной силе от сейсмического воздействия $m_0 L_0 a = L_0 q = 28800$ Н, ($49 \cdot 10 \cdot 59$), где $a = \frac{q}{m_0} = 58,8$ м/с² – сейсмическое ускорение совершившегося землетрясения. Допустимое сейсмическое ускорение превышает ускорение свободного падения ($g=9,81$ м/с²) более чем в 5 раз. Для коэффициента запаса $n=2$ при нагрузке $q=1440$ Н/м – $y_{max}=0,121$ м.

Сосредоточенная поперечная нагрузка в верхней части железобетонной балки выбрана из условий максимального натяжения подвешенных на опорах оптических кабелей с весом до 150 кг на километр. Статический прогиб модельной железобетонной консольной опоры с коэффициентом запаса $n=1$ при поперечной нагрузке на верхнем конце $F=3000$ Н составляет $y_{max}=0,12$ м, с коэффициентом запаса $n=2$ при нагрузке $F=1500$ Н – $y_{max}=0,06$ м. Предел прочности на растяжение железобетона был принят равным $\sigma_T=17$ МПа. Наличие арматуры в балке и применение предварительно напряженного бетона позволяет считать, что предел прочности минимум в 1,5 раза больше: $\sigma_{MAX}=26$ МПа. При этих условиях железобетонная опора выдерживает поперечную сосредоточенную нагрузку на верхнем конце $F=3000$ Н с коэффициентом запаса $n=1,5$.

Статический прогиб модельной железобетонной консольной опоры с пределом прочности $\sigma_T=26$ МПа с коэффициентом запаса $n=1$ при распределённой нагрузке по всей длине опоры $q=920$, Н/м составляет 0,142 м, что соответствует поперечной силе от сейсмического воздействия $m_0 L_0 a = L_0 q = 9200$ Н, ($109 \cdot 10 \cdot 3,5$), где $a = \frac{q}{m_0} = 8,44$ м/с² – сейсмическое ускорение совершившегося землетрясения. Та же балка с коэффициентом запаса $n=2$ при поперечной распределённой нагрузке $q=460$ Н/м отклонится на верхнем конце на $y_{max}=0,071$ м. Такое значение отклонения допустимо в динамическом режиме под действием синусоидальной поперечной распределённой нагрузки.

Статический прогиб не позволяет оценить поведение опоры под действием удара или импульса, а также гармонической силовой нагрузке, что может произойти при резком смещении грунта под опорой и его быстрой остановке при сейсмическом воздействии. Задачи линейной теории упругости для конечных областей, если граничные условия конкретной задачи позволяют в силу их высокой симметрии, могут часто рассматриваться как разрешимые. Рассмотрение прогибов стержня весьма важно в задачах устойчивости колебания и в ряде других задач. Наконец, расчёт прогибов необходим для решения статически неопределимых задач, когда изгибающий момент в сечении заранее неизвестен, что и происходит во время землетрясений при подвижках грунта.

Динамическое рассмотрение. Анализ простой динамической задачи для линейной балки Эйлера-Бернулли конечной длины, описываемой следующим дифференциальным уравнением в частных производных:

$$E \cdot J \frac{\partial^4 w}{\partial z^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_F(z, t), \quad (9, a)$$

или в общем случае

$$a_0^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Phi(z, t), \quad (9, b)$$

где $E \cdot J$ – жёсткость при изгибе;
 m_0 – линейная плотность материала балки;
 w – трансверсальное смещение.
 Параметр $a_0^2 = EJ/m_0$ имеет уже совсем иной смысл, чем в (2) и (5). Функция $f_F(z, t)$, (Н/м) учитывает внешнюю распределённую поперечную силу, приложенную к балке. В нашем случае это либо сила натяжения кабеля, которая может меняться при землетрясении из-за подвижек грунта и колебаний опоры и кабеля, либо сила инерции самой опоры. Функция $\Phi(z, t)$ по размерности соответствует распределённому ускорению балки в поперечном направлении. Кроме поперечной силы, внешнее воздействие на опору может учитываться через начальные условия как импульс или удар, что эквивалентно приданию всем точкам опоры скорости. Такое воздействие, как отмечалось, характерно при сдвиге грунта совместно с опорой во время землетрясения.

Дифференциальное уравнение (9) определяет широкий класс функций, называемых балочными [10].

$$\begin{aligned} \phi(\lambda, z) = & A \cdot ch(\lambda \cdot z) + B \cdot sh(\lambda \cdot z) + \\ & + C \cdot \cos(\lambda \cdot z) + D \cdot \sin(\lambda \cdot z). \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем необходимо определить в этом выражении коэффициенты A, B, C и D , а также частоту λ . Для этого используются краевые условия, при состав-

лении которых потребуется неоднократно дифференцировать балочную функцию. Эта операция, упрощается, если пользоваться другим видом балочной функции, который был предложен А.Н. Крыловым [10]:

$$K1(\lambda, z), K2(\lambda, z), K3(\lambda, z), K4(\lambda, z), \quad (11)$$

где $K1(\lambda, z) = 0,5 \cdot (ch(\lambda \cdot z) + cos(\lambda \cdot z));$
 $K2(\lambda, z) = 0,5 \cdot (sh(\lambda \cdot z) + sin(\lambda \cdot z));$
 $K3(\lambda, z) = 0,5 \cdot (ch(\lambda \cdot z) - cos(\lambda \cdot z));$
 $K4(\lambda, z) = 0,5 \cdot (sh(\lambda \cdot z) - sin(\lambda \cdot z)).$

Эти функции очень удобны для дальнейших преобразований, в которых используются операции дифференцирования и интегрирования.

Выражение (10) или набор балочной функции (11) можно использовать при исследовании свободных поперечных колебаний балки (табл. 1).

Поведение опор при импульсном поперечном воздействии. В этом случае опора горизонтально сдвигается вместе с грунтом при первом толчке во время землетрясения и за счёт инерции приобретает некоторую скорость после прекращения его смещения. Начальная скорость в момент прекращения смещения грунта $\partial_t w = \psi(z)$ при $t=0$ в общем случае может быть распределена не линейно по высоте опоры. То же самое можно сказать и о начальном смещении всех сечений опоры $w = \varphi(z)$. Помимо распределённых нагрузок по длине опоры возможно сосредоточенное воздействие на верхнюю часть опоры как рывок со стороны подвешенного кабельного изделия, что равноценно удару. На рис. 6 представлены формы прогибов опоры без подвешенного кабеля для одного из вариантов импульса в различные моменты времени.

Колебания происходят от вертикального положения налево, а затем направо и отображены для времен, кратных 1, 2, 3, 4, 8, 11 и 12 τ , то есть за $\frac{3}{4}t_0$ периода колебаний.

При начальной скорости от удара $\psi(z)$ по форме, совпадающей с первой балочной функцией (11), можно определить предельно возможные величины отклонений, скорости и ускорения свободного конца в виде простых математических выражений. Коэффициент $A_B = 0,62$ перед балочной функцией подбирается из учёта сохранения прочности опоры, а величина $X(\lambda, L)$

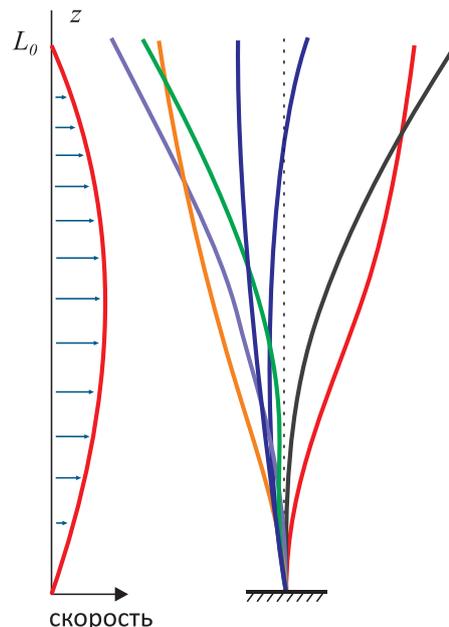


Рис. 6. Изменение геометрии (не в равном масштабе) модельной опоры высотой 10 м при воздействии ударного импульса, распределённого по всей длине, для моментов времени, кратных $\tau = 1/16 \cdot t_0$ периода колебаний

неизменна для консольной балки любого размера. Параметр $\lambda_1 = \frac{\mu_1}{L_0}$, где $\mu_1 = 1,875$ всегда. Таким образом, максимальная скорость свободного конца опоры:

$$\psi(z) = A_B \cdot X(\lambda_1, z) \quad \psi(L_0) = A_B \cdot 8,276.$$

Начальную скорость от удара $\psi(z)$ можно аппроксимировать полиномом (12), как для балки изогнутой распределённой нагрузкой (8):

$$V_{BF}(z) = V_q \cdot \left(L_0^2 \frac{z^2}{3} - L_0 \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right), \quad (12)$$

с коэффициентом пропорциональности V_q . Эюра скорости $V_{BF}(z)$ совпадает по форме с эюрой отклонения $y(z)$ для статической распределённой нагрузки и с эюрой первой балочной функции $X(\lambda, z)$.

Если учесть, что балочные функции ортогональны на длине балки, то в решении после использования полинома (12) останется только первый член ряда (первая гармоника):

Таблица 1
Параметры модельных консольных опор

Параметр	Размерность	Балка № 26Ш2	Железобетонная опора
Параметр a_0 из уравнения (9)	м/с ²	549	273
Круговая частота ω консольной опоры	Гц	19,3	9,6
Частота f консольной опоры	Гц	3,07	1,53



$$w_B(z, t) = X(\lambda_1, z) \frac{4}{a_0 L_0} \times \times \frac{A_B}{\lambda_1^2} \cdot \frac{104}{405} L_0 \cdot \sin(\lambda_1^2 a_0 t). \quad (12)$$

В итоге максимальное отклонение составит 0,273 м, максимальная скорость в верхней части опоры 5,13 м/сек, средняя скорость опоры 2,05 м/сек,

максимальное ускорение 102 м/сек² (10 g). Абсолютное изменение отклонения верхней части 10-метровой модельной опоры (двухтавровой балки 26Ш2) при сосредоточенном воздействии импульса в верхнюю часть не превышает 8 см и соответствует предельной прочности стали. Для бетонной опоры отклонения не должны превышать 5 см. Такое импульсное воздействие является наиболее опасным для опоры с точки зрения сохранения её прочности. Можно принять, что максимальное ускорение в верхней части модельной

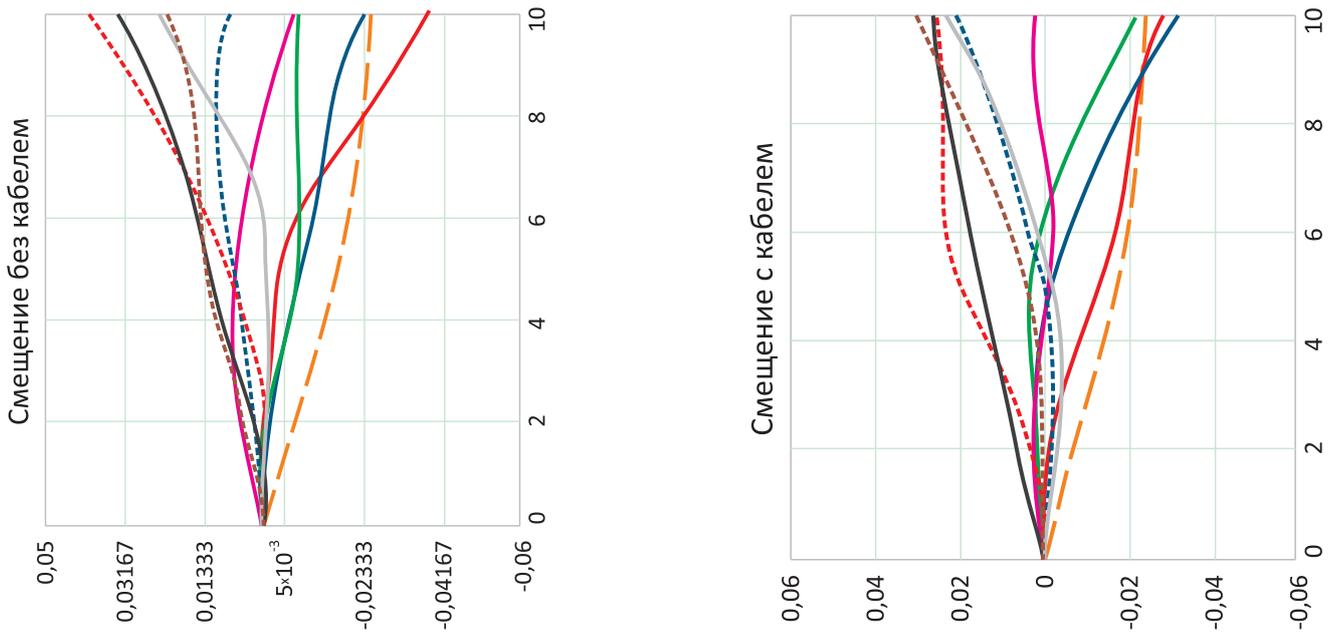


Рис. 7. Изменение геометрии (не в равном масштабе) модельной опоры высотой 10 м при начальном смещении (пунктирная линия) для моментов времени, кратных $\tau=1/16 \cdot t_0$ периода колебаний

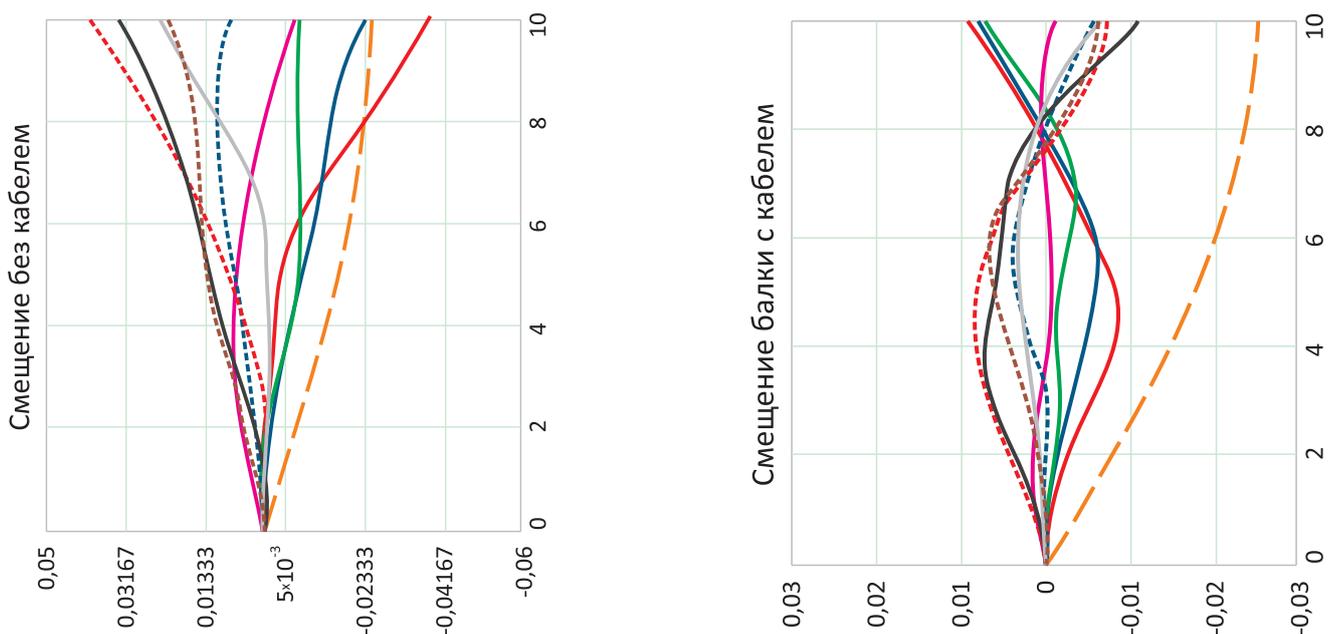


Рис. 8. Изменение геометрии (не в равном масштабе) модельной опоры высотой 10 м при начальном смещении (пунктирная линия) для моментов времени, кратных $\tau=1/16 \cdot t_0$ периода колебаний

Таблица 2
Параметры модельных консольных опор

Параметр	Размерность	Балка № 26Ш2
Параметр a_0 из уравнения (9)	м/с ²	549
Первые три собственных значения λ консольной опоры без кабеля	м ⁻¹	0,1875; 0,4694; 0,7855
Частота колебаний f консольной опоры без кабеля	Гц	3,07
Первые три собственных значения λ консольной опоры с кабелем при $c_1 = 4 \times 10^4$ Н/м	м ⁻¹	0,1068; 0,4668; 0,7849
Частота f консольной опоры с кабелем при $c_1 = 4 \times 10^4$ Н/м (опора на пружину растяжения)	Гц	1,00
Первые три собственных значения λ консольной опоры с кабелем при $c_1 = 7 \times 10^4$ Н/м	м ⁻¹	0,4649; 0,7845; 1,0992
Частота f консольной опоры с кабелем при $c_1 = 7 \times 10^4$ Н/м	Гц	18,9

стальной опоры (двутавровой балки 26Ш2) и бетонной опоры составляет 10 g и 1,5 g соответственно. Указанные ускорения передаются оптическому кабелю и являются основой для расчёта прогиба кабеля при его колебаниях.

Поведение опор с кабелем. Для опоры, закреплённой по схеме: жёсткая заделка + опора на пружину растяжения (жёсткость пружины c_1), когда закреплённый в её верхней части кабель моделируется пружиной, сдерживающей колебания опоры, граничные условия будут иметь вид:

$$E \cdot J \cdot w'(L_0, t) = 0, \quad \text{т.е.} \quad w''(L_0, t) = 0,$$

$$E \cdot J \cdot w'''(L_0, t) = c_1 \cdot w(L_0, t),$$

где нижние индексы у производных опущены.

На рис. 7 представлены формы прогибов опоры без подвешенного кабеля и с ним для одного из вариантов начального отклонения в различные моменты времени. Кабельное изделие в этом случае «сдерживает» колебание опоры и существенно уменьшает частоту этих колебаний (табл. 2).

При некоторых коэффициентах жёсткости пружины c_1 первая гармоника может выпадать, и частота колебаний опоры скачком переходит на вторую гармонику (рис. 8). Верхняя треть опоры в этом случае становится узлом при колебаниях опоры.

Таким образом, для модельной стальной вертикальной консольной опоры в ненагруженном и нагруженном состояниях получены предельно возможные величины отклонений, скорости и ускорения свободного конца, которые передаются на оптический кабель и служат основой для оценки его сейсмической стойкости и резонансных частот колебаний.

Список литературы

1. **Потапов А.Д.** Землетрясения. Причины, последствия и обеспечение безопасности: учеб. пособие / А.Д. Потапов, И.Л. Ревелис, С.Н. Чернышев; под ред. С.Н. Чернышева. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 343 с.
2. **Маневич Л.И.** Аналитически разрешимые модели механики твердого тела / Л.И. Маневич, О.В. Гендельман. – М.: Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2016. – 343 с.
3. **Н.М. Irvine, T. Caughey.** The linear theory of free vibrations of a suspended cable // Proc. of the Royal Society. – 1974. – A 341(1626). – P. 299–315.
4. **A. Luongo, G. Rega, F. Vestroni.** Planar non-linear free vibrations of an elastic cable // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1984. – № 19 (1). – P. 39–52.
5. **Francesco Potenza, Marco Lepidi, Umberto Di Sabatino, Vincenzo Gattulli.** Nonlinear dynamics of a parametric analytical model for beam-cable-beam structures // Procedia Engineering. – 2017. – № 199. – P. 796–801.
6. **S. Ali Ghafari Oskoei, Ghyslaine McClure.** A novel approach to evaluate the equivalent dynamic stiffness of guy clusters in telecommunication masts underground excitation // Engineering Structures. – 2011. – № 33. – P. 1764–1773.
7. **Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.** Сопротивление материалов. – М.: Издательство ЛЕНАНД, 2019. – 560 с.
8. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.** Линейные уравнения математической физики. Справочник. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 576 с.
9. Сборник задач по математической физике: учеб. пособие для студентов вузов / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ (ППП тип. Наука), 2003. – 688 с.
10. **Доев В.С.** Поперечные колебания балок: учеб. пособие / В.С. Доев. – М.: КНОРУС, 2018. – 412 с.